M2 - MFA 2014-2015

J-P. CROISILLE / D. YE

Equations de la mécanique des fluides

Feuille 2

1- On considère les équations d'Euler incompressible dans $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} \partial_t \underline{u} + \underline{u}.\nabla \underline{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = 0 \\ \operatorname{div} \underline{u} = 0 \end{cases} \quad , \underline{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \quad p \in \mathbb{R}$$

On suppose que $\underline{u}.\underline{\nu} = 0$ sur $\partial\Omega$, $\underline{\nu} = \underline{\nu}(x)$, $x \in \partial\Omega$, normale extérieure à Ω. Pour tout $m \geq 0$, montrer que $\frac{d}{dt}\int_\Omega \omega^m(\underline{x})\, d\underline{x} = 0$ où

$\omega = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$.

2- On considère les équations de Navier-Stokes incompressible dans $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3.

$$\begin{cases} \partial_t \underline{u} + \underline{u}.\nabla \underline{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p - \nu \Delta \underline{u} = 0 \\ \operatorname{div} \underline{u} = 0 \end{cases}$$

$\underline{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, Ω ouvert régulier, $\underline{u}.\underline{\nu} = 0$ sur $\partial\Omega$.

Pour $\underline{x} \in \Omega \to a(x) \in \mathbb{R}$, on note $\|a\|_2$ la norme

$$\|a\|_2^2 = \int_\Omega a^2(\underline{x})\, d\underline{x}.$$

Pour $\underline{x} \in \Omega \mapsto \underline{v}(\underline{x}) = (v_1(\underline{x}), v_2(\underline{x})) \in \mathbb{R}^2$, on note

$$\|\underline{v}\|_2^2 = \int_\Omega \left(v_1^2(\underline{x}) + v_2^2(\underline{x}) \right) d\underline{x}.$$

Soit $E(t) = \frac{1}{2}\rho_0 \|u(.,t)\|_2^2$.

a) Vérifier que $E'(t) = -\nu\rho_0 \|\nabla \underline{u}(.,t)\|_2^2$.

b) Soit $\underline{\omega} = \nabla \wedge \underline{u}$. Vérifier que $\|\underline{\omega}\|_2 = \|\nabla \underline{u}\|_2$

En déduire $E'(t)$ en fonction de ω.

3 – On considère un gaz parfait de loi d'état

$p = (\gamma-1)\rho\varepsilon$, ρ densité, ε = énergie interne

Les équations d'Euler compressible s'écrivent

$$\partial_t w + \partial_x f(w) = 0$$

avec $w^T = [\rho, \rho u, \rho e]^T$, $e = \varepsilon + \frac{1}{2}|u|^2$

$$f(w)^T = [\rho u, \rho u^2 + p, (\rho e + p)u]^T$$

a) Exprimer $f(w)_j$, $j = 1, 2, 3$, en fonction de w_k, $k = 1, 2, 3$.

b) Déduire de (1) les équations d'évolution pour $v = [\tau = \frac{1}{\rho}, u, \varepsilon]$

c) On note $D_t = \partial_t + u\partial_x$, où $u(x,t)$ est supposée régulière. Calculer $D_t v$ en fonction de v.